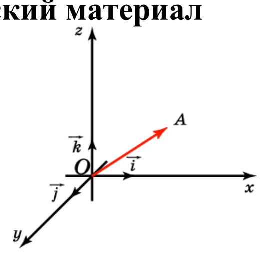
Тема: Векторы в пространстве

Теоретический материал

Вектором называется направленный отрезок.

Отложим вектор так, чтобы его начало совпало с началом координат. Тогда координаты его конца называются координатами вектора.



Обозначим $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ векторы с координатами (1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1) соответственно. Их длины равны единице, а направления совпадают с направлениями соответствующих осей координат

<u>Теорема.</u> Вектор $\vec{a}$ имеет координаты (x, y, z) тогда и только тогда, когда он представим в виде $\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$

Два вектора плоскости образуют **базис**, если они не коллинеарны (линейно независимы)

Действия над векторами	Запись	Пример
1	2	3
1. Результатом умножения вектора $\bar{a}$ на число k является вектор $\bar{b} = k\bar{a}$	$\bar{a}(x_1; y_1; z_1)$, k – число, то $\bar{b} = k\bar{a} = (kx_1; ky_1; kz_1)$	$\bar{a} = (-1;2;0)$; $k = 3$, тогда $\bar{b} = 3\bar{a} = (3\cdot(-1);3\cdot 2;3\cdot 0) =$ $= (-3;6;0)$
2. Сложение векторов. Вычитание векторов.	$\bar{a}(x_1; y_1; z_1)$; $\bar{b}(x_2; y_2; z_2)$ $\bar{a} + \bar{b} = (x_1 + x_2; y_1 + y_2; z_1 + z_2)$ $\bar{a} - \bar{b} = (x_1 - x_2; y_1 - y_2; z_1 - z_2)$	$\bar{a}(2;-3;1)$; $\bar{b}(0;1;4)$, тогда $\bar{a} + \bar{b} = (2+0;-3+1;1+4) =$ $= (2;-2;5)$
3. Нахождение координат вектора (из соответствующих координат его конца вычитают координаты начала)	$M_1(x_1; y_1; z_1)$; $M_2(x_2; y_2; z_2)$ $\overline{M_1M_2}(x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1)$	$M_1(2;-1;4)$, $M_2(3;1;0)$ $\overline{M_1M_2}(3-2;1-(-1);0-4)$; $\overline{M_1M_2}(1;2;-4)$
4. Длина вектора.	$\bar{a}(x_1; y_1; z_1)$ $\quad |\bar{a}| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}$	$\bar{a}(5;-3;1)$ $|\bar{a}| = \sqrt{25+9+1} = \sqrt{35}$
5. Условие коллинеарности векторов: векторы коллинеарны, если их соответствующие координаты пропорциональны.	$\bar{a}(x_1; y_1; z_1)$ и $\bar{b}(x_2; y_2; z_2)$ $\dfrac{x_1}{x_2} = \dfrac{y_1}{y_2} = \dfrac{z_1}{z_2}$	$\bar{a}(5;6;7)$, $\bar{b}(10;12;14)$ $\dfrac{5}{10} = \dfrac{6}{12} = \dfrac{7}{14} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow$ $\Rightarrow$ векторы коллинеарны
6. Скалярное произведение векторов – это число, равное произведению длин векторов на косинус угла между ними. Скалярное произведение векторов равно сумме произведений одноименных координат.	$\bar{a} \cdot \bar{b} = |\bar{a}| \cdot |\bar{b}| \cdot \cos(\bar{a}, \hat{} \, \bar{b})$ $\bar{a}(x_1; y_1; z_1)$ и $\bar{b}(x_2; y_2; z_2)$ $\bar{a} \cdot \bar{b} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$	$\bar{a}(2;-3;1)$; $\bar{b}(0;1;4)$ $\bar{a} \cdot \bar{b} = 2\cdot 0 + (-3)\cdot 1 + 1\cdot 4 =$ $= 0 - 3 + 4 = 1$
7. Косинус угла между векторами.	$\cos\varphi = \dfrac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$	
8. Условие перпендикулярности векторов: скалярное произведение равно нулю..	$\bar{a}(x_1; y_1; z_1)$ и $\bar{b}(x_2; y_2; z_2)$ $\bar{a} \cdot \bar{b} = 0 \Rightarrow \bar{a} \perp \bar{b}$ $x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 = 0$	$\bar{a}(5:-2;0)$; $\bar{b}(-2;-5;0)$ $5\cdot(-2) + (-2)\cdot(-5) + 0\cdot 0 =$ $= 0 \Rightarrow \bar{a} \perp \bar{b}$

Задание для самостоятельной работы (выслать до 22 марта)

Даны точки: $A(0;-N)$, $B(N;0)$, $C(N-5;1-N)$, $D(-N-2;N+1)$, где N **– номер студента по списку**.

1. Найти координаты и длины векторов $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$.
2. При каком значении m перпендикулярны векторы $\vec{a}(1;-m;-2)$ и $\vec{b}(m;2;-4)$?
3. Проверьте, коллинеарные ли векторы $\overline{AD}$ и $\overline{CD}$?
4. Найти скалярное произведение векторов $(2\vec{a} - \vec{b})(\vec{a} + \vec{b})$, если $\bar{a}(-1;-2;N)$, $\bar{b}(3;N;-2)$
5. Найти угол между векторами $\overline{AC}$ и $\overline{BD}$.

Список студентов

1. Говоров Егор А.
2. Кондаков Дмитрий А.
3. Куманцов Даниил В.
4. Лубкин Данила И.
5. Михайлин Даниил А.
6. Нарзулоев Давлат З.
7. Нестеров Антон Н.
8. Обыденнова Анна С.
9. Панов Максим М.
10. Решетов Никита В.
11. Рожков Никита В.
12. Рязанов Егор А.
13. Сандриков Артем М.
14. Сидоров Роман В.
15. Смирнова Елизавета О.
16. Степанов Никита О.
17. Филимонов Денис З.
18. Финенко Константин М.
19. Фурманов Данил В.
20. Шилин Кирилл А.

   Электронный адрес преподавателя:
   Viktorkrym55@gmail.com